

用摄动法研究几何尺寸为随机量时 轮盘的可靠性

西北工业大学 王应珍* * 吕文林

【摘要】 几何尺寸和材料性质等的随机性都影响结构的可靠性。本文提出用建立在二阶摄动法基础上的概率有限元来分析轮盘的几何形状不确定时的随机应力场和可靠性, 研究用摄动方法处理问题的基本思路, 推导随机应力场和可靠度的计算公式, 用简单算例分析讨论了几何尺寸对可靠性的影响规律, 算例结果与 Monte Carlo 模拟结果的对比表明本文的方法有效, 理论正确。

主题词: 航空发动机 摄动法 轮盘 结构可靠性 概率有限元法

分类号: V 232.3

1 前 言

在零件的设计和分析时, 通常将几何尺寸和材料性质等考虑为确定性的。事实上几何尺寸、材料性质和载荷都是随机的。这些随机量的幅度虽然很小, 但他们对危险部件性能的影响很大^[1], 因此研究他们对零件可靠性的影响有着非常重要的意义。

我们已经对航空发动机零部件的可靠性做了许多研究工作^[2,3]。研究对象包括了盘、片、轴以及其它一些零件; 考虑的随机因素有载荷和材料性质; 处理问题的主要方法是概率有限元; 研究了不同零件的不同失效模式。

由于某些原因引起零件几何形状的不确定性, 使节点坐标为随机量。这必然导致刚度矩阵、位移、应变和应力都为随机量, 并且变形问题已转化为非线性的。本文将研究几何尺寸不确定性对轮盘变形和可靠性的影响, 提出用摄动方法分析这类结构的可靠性, 着重研究用该方法处理问题的思路和基本原理。为了能与 Monte Carlo 模拟值比较, 选用了简化算例。研究表明, 摄动法是解决尺寸和节点温度不确定的结构可靠性问题的有效方法。

2 几何尺寸不确定结构的变形问题

以六节点等参三角形单元为例进行研究, 其它单元的研究方法基本相同。

第 i 号节点的坐标可表示为:

$$x_i = x_i^0 + \alpha, \quad y_i = y_i^0 + \beta \quad (1)$$

这里 x_i^0 和 y_i^0 为确定项, 为节点坐标的期望值。 α 和 β 为随机项, 其期望值为零。结构的边界是影响 α 和 β 的主要因素。为了在单元尺寸小, 但摄动量比较大时仍能使问题满足摄动法的要求, 我们将边界尺寸的随机量按坐标线性地分配到每个节点的坐标上。

整体刚度矩阵 $[K]$ 中第 (i, j) 项可开展为摄动量 α 和 β 的二阶摄动形式。这里只取低于

二阶摄动量的所有项, 忽略高阶项。

$$K_{\bar{y}} = K_{\bar{y}}^o + \sum_k (K_{ij}^{\alpha k} \alpha_k + K_{ij}^{\beta k} \beta_k) + \sum_k \sum_l (K_{ij}^{\alpha k l} \alpha_k \alpha_l + K_{ij}^{\alpha \beta k l} \alpha_k \beta_l + K_{ij}^{\beta k l} \beta_k \beta_l) \quad (2)$$

其中 k 和 l 是对 K_{ij} 有影响的所有节点求和。

节点位移的摄动表达式为:

$$u_i = u_i^o + \sum_k (u_{ik}^{\alpha} \alpha_k + u_{ik}^{\beta} \beta_k) + \sum_k \sum_l (u_{ikl}^{\alpha} \alpha_k \alpha_l + u_{ikl}^{\alpha \beta} \alpha_k \beta_l + u_{ikl}^{\beta} \beta_k \beta_l) \quad (3)$$

雅可比矩阵 $[J]$ 和行列式 $|J|$ 分别为

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11}^o & J_{12}^o \\ J_{21}^o & J_{22}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{11}^{\alpha} & J_{12}^{\alpha} \\ J_{21}^{\alpha} & J_{22}^{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$|J| = D_o + \sum_i A_i \alpha_i + \sum_i B_i \beta_i + \sum_i \sum_j C_{ij} \alpha_i \beta_j \quad (5)$$

其中

$$J_{11}^o = \frac{\partial \sum_i N_i x_i^o}{\partial \mathcal{L}_1} - \frac{\partial \sum_i N_i y_i^o}{\partial \mathcal{L}_3}, \quad J_{11}^{\alpha} = \frac{\partial \sum_i N_i \alpha_i^o}{\partial \mathcal{L}_1} - \frac{\partial \sum_i N_i \beta_i^o}{\partial \mathcal{L}_3}, \quad \dots \quad (6)$$

雅可比逆矩阵的二阶摄动表达式

$$D_o[J]_{ij}^{-1} = D_o[J^o]_{ij}^{-1} - \sum_k (m_{ij}^{\alpha k} \alpha_k + n_{ij}^{\beta k} \beta_k) + \sum_k \sum_l (f_{ij}^{\alpha k l} \alpha_k \alpha_l + g_{ij}^{\alpha \beta k l} \alpha_k \beta_l + h_{ij}^{\beta k l} \beta_k \beta_l) \quad (7)$$

以上各式中的 A_i 、 B_i 、 C_{ij} 、 $f_{ij}^{\alpha k l}$ 、 $g_{ij}^{\alpha \beta k l}$ 、 $h_{ij}^{\beta k l}$ 、 $n_{ij}^{\beta k}$ 和 $m_{ij}^{\alpha k}$ 都是单元节点坐标 (x_i^o, y_i^o) 的函数, 与 α_k 和 β_k 无关。

由此可计算得单元刚度矩阵为

$$[k] = [k]^o + \sum_k ([k]_k^{\alpha} \alpha_k + [k]_k^{\beta} \beta_k) + \sum_k \sum_l ([k]_{kl}^{\alpha \alpha} \alpha_k \alpha_l + [k]_{kl}^{\alpha \beta} \alpha_k \beta_l + [k]_{kl}^{\beta \beta} \beta_k \beta_l) \quad (8)$$

其中 $[D]$ 为弹性矩阵。

按常规方法将单元刚度矩阵组集成整体刚度矩阵, 立即得平衡方程:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (9)$$

将 (2) 式和 (3) 式代入 (9) 式, 按 α 和 β 展开整理后, 比较 α 和 β 的各次幂的系数, 并进行大量计算可得式 (3) 中各次幂的系数:

$$\begin{aligned} \{u\}^o &= [K]^{-1} \{F\}, \quad \{u\}_k^{\alpha} = -[K]^{-1} [K]_k^{\alpha} \{u\}^o, \quad \{u\}_k^{\beta} = -[K]^{-1} [K]_k^{\beta} \{u\}^o \\ \{u\}_{kl}^{\alpha \alpha} &= -[K]^{-1} ([K]_l^{\alpha} \{u\}_k^{\alpha} + [K]_{kl}^{\alpha \alpha} \{u\}^o), \quad \{u\}_{kl}^{\beta \beta} = -[K]^{-1} ([K]_l^{\beta} \{u\}_k^{\beta} + [K]_{kl}^{\beta \beta} \{u\}^o) \\ \{u\}_{kl}^{\alpha \beta} &= -[K]^{-1} ([K]_k^{\alpha} \{u\}_l^{\beta} + [K]_{kl}^{\alpha \beta} \{u\}^o + [K]_{kl}^{\beta \alpha} \{u\}^o) \end{aligned} \quad (10)$$

计算并整理得单元的应变和应力的摄动表达式:

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \{\epsilon\}^o + \sum_k (\{\epsilon\}_k^{\alpha} \alpha_k + \{\epsilon\}_k^{\beta} \beta_k) + \sum_k \sum_l (\{\epsilon\}_{kl}^{\alpha \alpha} \alpha_k \alpha_l + \{\epsilon\}_{kl}^{\alpha \beta} \alpha_k \beta_l + \{\epsilon\}_{kl}^{\beta \beta} \beta_k \beta_l) \\ \{\sigma\} &= [D]\{\epsilon\} = \{\sigma\}^o + \sum_k (\{\sigma\}_k^{\alpha} \alpha_k + \{\sigma\}_k^{\beta} \beta_k) + \sum_k \sum_l (\{\sigma\}_{kl}^{\alpha \alpha} \alpha_k \alpha_l + \{\sigma\}_{kl}^{\alpha \beta} \alpha_k \beta_l + \{\sigma\}_{kl}^{\beta \beta} \beta_k \beta_l) \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\{\sigma\}^o = [D]\{\epsilon\}^o, \quad \{\sigma\}_k^{\alpha} = [D]\{\epsilon\}_k^{\alpha}, \quad \{\sigma\}_k^{\beta} = [D]\{\epsilon\}_k^{\beta} \quad (12)$$

3 可靠性分析

应力的均值和方差分别为:

$$E[\{\sigma_i\}] = \{\sigma_i\}^o + \sum_k \sum_l (\{\sigma_i\}_{kl}^{\alpha\alpha} E[\alpha_k \alpha_l] + \{\sigma_i\}_{kl}^{\alpha\beta} E[\alpha_k \beta_l] + \{\sigma_i\}_{kl}^{\beta\beta} E[\beta_k \beta_l]) \quad (13)$$

$$Var[\sigma_i] = E[(\sigma_i - E[\sigma_i])^2] = E[\sigma_i^2] - E[\sigma_i]^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (14)$$

忽略 α 和 β 的 3 次以上高次项后, 得

$$Var[\sigma_i] = \sum_k \sum_l (\sigma_{ik}^{\alpha\alpha} \sigma_{il}^{\alpha\alpha} E[\alpha_k \alpha_l] + \sigma_{ik}^{\alpha\beta} \sigma_{il}^{\beta\beta} E[\alpha_k \beta_l] + \sigma_{ik}^{\beta\beta} \sigma_{il}^{\beta\beta} E[\beta_k \beta_l]) \quad (15)$$

在对航空发动机的零部件的性能分析中, 仅有应力的均值和方差是不够的, 还应该分析其可靠性。

对于发动机的轮盘, 由于轴向应力较小, 暂将其处理为双向应力问题, 以简化 *Mises* 强度准则建立临界函数的形式。

$$g = 1 - ((\sigma_{11}^2 \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2) / \sigma_s^2) \quad (16)$$

其中 σ 为材料屈服强度, 为一随机量。

将(12)式代入(16)式, 计算整理得

$$g = 1 - g^o - \sum_k (g_k^{\alpha\alpha} \alpha_k + g_k^{\beta\beta} \beta_k) - \sum_k \sum_l (g_{kl}^{\alpha\alpha} \alpha_k \alpha_l + g_{kl}^{\alpha\beta} \alpha_k \beta_l + g_{kl}^{\beta\beta} \beta_k \beta_l) \quad (17)$$

其中

$$g^o = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}{\sigma_s^2}, \quad g_k^{\alpha\alpha} = \frac{2\sigma_x \sigma_{xk}^{\alpha\alpha} + 2\sigma_y \sigma_{yk}^{\alpha\alpha} - \sigma_x \sigma_{yk}^{\alpha\alpha} - \sigma_y \sigma_{xk}^{\alpha\alpha} + 6\tau_{xy} \tau_{xyk}}{\sigma_s^2}$$

$$g_{kl}^{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_{xk}^{\alpha\alpha} \sigma_{xl}^{\alpha\alpha} + 2\sigma_x \sigma_{xkl}^{\alpha\alpha} + \sigma_{yk}^{\alpha\alpha} \sigma_{yl}^{\alpha\alpha} + 2\sigma_y \sigma_{ykl}^{\alpha\alpha} - \sigma_{xk}^{\alpha\alpha} \sigma_{yl}^{\alpha\alpha} - \sigma_x \sigma_{ykl}^{\alpha\alpha} - \sigma_y \sigma_{xkl}^{\alpha\alpha} + 3\tau_{xyk} \tau_{xyl}^{\alpha\alpha} + 6\tau_{xy} \tau_{xykl}}{\sigma_s^2}$$

$$\dots\dots \quad (18)$$

由此得临界函数 g 的均值和方差:

$$E[g] = 1 - g^o - \sum_k \sum_l (g_{kl}^{\alpha\alpha} E[\alpha_k \alpha_l] + g_{kl}^{\alpha\beta} E[\alpha_k \beta_l] + g_{kl}^{\beta\beta} E[\beta_k \beta_l])$$

$$Var[g] = \sum_k \sum_l (g_{ik}^{\alpha\alpha} g_{il}^{\alpha\alpha} E[\alpha_k \alpha_l] + g_{ik}^{\alpha\beta} g_{il}^{\beta\beta} E[\alpha_k \beta_l] + g_{ik}^{\beta\beta} g_{il}^{\beta\beta} E[\beta_k \beta_l]) + \left(\frac{\partial g^o}{\partial \sigma_s} \right) Var[\sigma_s] \quad (19)$$

若引起轮盘尺寸随机性的因素共有 N 个, 对应的随机量为 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。设这些随机量相互独立, 则(17)式和(19)式可表为:

$$g = 1 - g^o - \sum_{k=1}^N g_k^{\theta\theta} \theta_k - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N g_{kl}^{\theta\theta} \theta_k \theta_l + \left(\frac{\partial g^o}{\partial \sigma_s} \right) (\sigma_s - E[\sigma_s])$$

$$E[g] = 1 - g^o - \sum_{k=1}^N g_{kk}^{\theta\theta} E[\theta_k^2], \quad Var[g] = \sum_{k=1}^N (g_k^{\theta\theta})^2 E[\theta_k^2] + \left(\frac{\partial g^o}{\partial \sigma_s} \right) Var[\sigma_s] \quad (20)$$

相应的可靠度 Re 和破坏概率 P_f 分别为

$$P_f = \Phi(-\beta), \quad Re = 1 - P_f = \Phi(\beta) \quad (21)$$

其中 Φ 为标准正态分布, β 为可靠性指标, β 由下式决定:

$$\beta = E[g] / \sqrt{Var[g]} \quad (22)$$

4 计算实例

为了与 *Monte Carlo* 方法比较, 以检验摄动方法的可行性, 我们以等厚空心轮盘为例讨论几何形状不确定时的可靠性, 对于处理复杂形状的轮盘和其它零部件可靠性的方法与本文类似。我们正在整理用摄动方法计算几何尺寸与温度场同时为随机时的全尺寸发动机轮盘的可靠性的文章, 另文发表。

如图 1 是在离心力作用下的等厚空心盘。设盘的内半径和屈服强度为随机量,都服从正态分布。盘的材料为 TC11, 弹性模量 $E = 1.21 \times 10^5$ (MPa), 密度 $\rho = 4.48 \times 10^3$ (kg/m³), 泊松比 $\mu = 0.33$, 屈服强度的均值 $\sigma_s = 1076$ (MPa), 变异系数为 0.1; 转速 $n = 18000$ (r/min); 内径的平均值 $r_i = 3.0$ (cm), 外径 $r_o = 27$ (cm); 载荷 $q_b = 2.5 \times 10^6$ (MPa)。

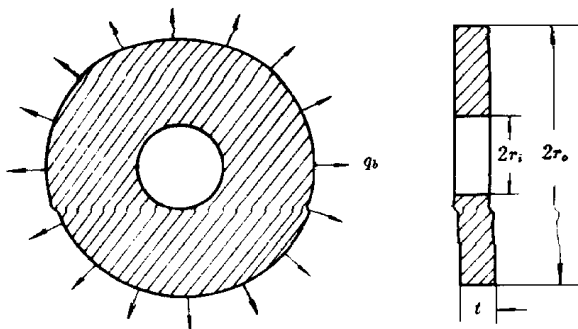


图 1 等厚空心盘

计算可知,危险点集中在内孔边缘附近。数值计算和 Monte Carlo 模拟危险点的可靠度列于表 1。计算结果说明:内半径的随机性对可靠度有较大的影响,内半径的变异系数越大,可靠度迅速减小,而且可靠度与内半径的变异系数具有极强的非线性关系。计算值与 Monte Carlo 模拟值非常接近,说明本文采用的处理方法是合理的。

表 1 危险点($r = 3mm$)

内半径的变异系数 i	0.034	0.1	0.2	0.3
可靠度计算值 R_c	0.862	0.840	0.773	0.570
Monte Carlo 模拟值 R_c	0.857	0.841	0.770	0.572

5 结 论

- (1) 本文的研究表明二阶摄动概率有限元是解决几何尺寸不确定结构的非常有效的方法,推广了我们对航空发动机可靠性研究的思路和方法。
- (2) 轮盘内径的随机性对可靠性影响很大,内半径的标准离差越大,可靠度迅速减小,而且可靠度与内半径的变异系数具有极强的非线性关系。
- (3) 凭借有限元处理问题的面广和灵活性的特点,用本方法可以处理相当复杂的问题。

参 考 文 献

- 1 Bilam M, Ayyub and Chao Yichia. Generlized Conditional Expectation For Structural Reliability Assessment. Structural Safety, 11, 1992
- 2 吕文林,付爽.考虑材料物理参数为随机量时可靠度的计算.航空动力学报,1993,8(1)
- 3 吕文林,段振龙.随机有限元分析定向结晶涡轮叶片在随机压力场的可靠性.航空动力学报,1991,6(1)

(责任编辑 王震华)

PERTURBATION TECHNIQUE FOR RELIABILITY ANALYSIS OF A ROTATING DISK WITH UNCERTAIN GEOMETRY

Wang Zhenying and Lu Wenlin

(*Dept., Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072*)

ABSTRACT

Design methods for the aerospace technology are, in general, based on deterministic parameters. In practice there always exist random deviations of parameters, such as material properties and geometry, forces, and boundary conditions. In most situations the random deviations are small, but their overall effect can have a strong impact on behaviours of critical components, particularly in failure and reliability analysis. For this reason a probabilistic finite element method based on second-order perturbation technique is used to analyze the reliability and the random stresses of a rotating disk with uncertain geometry, the elementary perturbation approach to this problem has been studied and formulas for the random stress and the reliability have been deduced. The effect of uncertain geometry on the reliability is considered by a simple numerical example. The accuracy and efficiency of the method is demonstrated by its application to a rotating disk with uncertain geometry. The reliability calculated by this method compares favorably with that obtained from Monte Carlo simulation.

Key words Aircraft engines Perturbation method Structural reliability
Finite element methods

STRESS ANALYSIS OF CHECK RING CONNECTING STRUCTURE BETWEEN COMPOSITE CASE AND NOZZLE

Cheng Xiaomin

(*Nanhua Powerplant Research Institute, Zhuzhou 412002*)

Chen Ruxun and Yang Weiguo

(*Powerplant Research Institute, Shanxi*)

ABSTRACT

The check ring connecting structure between composite case of solid propellant rocket motor and conic fixed body of a nozzle is of great advantage to decrease the mass and stress. In order to analyze this structure an equivalent orthotropic axis-symmetric body is used to represent composite motor case and a FEM program for contact problem with large deformations is developed. The calculation shows that the relative displacement between check ring and nozzle conic fixed body and the angle between two sealing surfaces are very small under the working load. This fact indicates that the check ring connecting structure is safe in application. The relations of the concerned structure parameters to the deflection of the sealing surfaces are discussed. For the sake of comparison it is also found that the structure of submerged fitting increases the contact area magnificently and decrease the angle between two sealing surfaces to 4.02%.

Key words Composite materials Jet nozzles Structural analysis Deformation method

PREDICTION OF GEAR BENDING FATIGUE STRENGTH RELIABILITY

Le Xiaobin

(*2nd Dept., Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016*)

Luo Lifong and Chen Ying

(*6th Dept., Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030*)

ABSTRACT

A new view point is taken that the fatigue failure of the gear under bending load is treated as a random event, and a method for predicting the gear fatigue strength reliability